Вариант 1

1. **(2 балла)** В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 26 красных, 31 синяя и 16 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

Ответ: синяя.

2. **(3 балла)**Решите уравнение:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

Ответ: $x=\frac{7}{15};\, x=\frac{4}{5}$

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, если известно, что $f\left(x\right)=x^2-4x-5$.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(5\pm3\sqrt{5}\right)$, $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{41})$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_2\left(y-x\right)=\log_8\left(9y-15x\right)\\ x^2+y^2=15\end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\sqrt{15};0\right);\left(\sqrt{\frac{3}{2}};3\sqrt{\frac{3}{2}}\right);\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)\right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 3, а угол между ними – $\arccos\frac{5}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: $\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{3}$, 2 и 1.

6. **(5 баллов)** Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении n^2 при $n=1,2,3,\ldots$ ($a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=9,\ a_4=1,\ a_5=2,\ldots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству

$$10^k\sqrt{b}\le n<10^k\sqrt{b+1},$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b, поскольку

$$10^{2k}b=\overline{b\underbrace{0\ldots0}_{2k}}\le n^2\le\overline{b\underbrace{9\ldots9}_{2k}}=10^{2k}(b+1)-1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[10^k\sqrt{b};10^k\sqrt{b+1}\right)$ неограниченно возрастает (т.к. $\sqrt{b+1}-\sqrt{b}>0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, …, девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Вариант 2

1. **(2 балла)** В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 47 красных, 40 синих и 53 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

Ответ: синяя.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{9x-4}{6}\right]=\frac{12x+7}{4}.$$

Ответ: $x=-\frac{9}{4}; x=-\frac{23}{12}$.

3. **(3 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, если известно, что $f\left(x\right)=x^2+2x-4$.

Ответ: $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{17})$, $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{13})$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_2\left(y-x\right)=\log_8\left(19y-13x\right)\\ x^2+y^2=13\end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\sqrt{13};0\right);\left(-3;-2\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 5 и 13, а угол между ними – $\arccos\frac{6}{13}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: 3 и 2, $\frac{39}{5}$ и $\frac{26}{5}$.

6. **(5 баллов)**Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении $\left[\sqrt{n}\right]$ при $n=1,2,3,\ldots$ ($a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=2,\ a_5=2,\ldots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству

$$10^{2k}\cdot b^2 \le n < 10^{2k}\left(b+1\right)^2,$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b, поскольку

$$10^k b = \overline{b\underbrace{0\ldots0}_{k}} \le \sqrt{n} \le \overline{b\underbrace{9\ldots9}_{k}} = 10^k(b+1)-1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[10^{2k}b^2;\ 10^{2k}\left(b+1\right)^2\right)$ неограниченно возрастает (т.к. $\left(b+1\right)^2-b^2>0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, …, девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Вариант 3

1. **(2 балла)**В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 62 красных, 48 синих и 63 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

Ответ: желтая.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{8x-4}{7}\right]=\frac{12x+3}{5}.$$

Ответ: $x=-\frac{3}{2}$, $x=-\frac{13}{12}$

3. **(3 балла)**Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, если известно, что $f\left(x\right)=x^2+5x-4$.

Ответ: $2(-1\pm\sqrt{2})$, $-3\pm\sqrt{7}$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_2\left(y-x\right)=\log_8\left(11y-5x\right)\\ x^2+y^2=5\end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\sqrt{5};0\right);\left(-1;2\right);\left(-\frac{3}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 5, а угол между ними – $\arccos\frac{7}{16}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот

параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: $\frac{4}{5}$ и $\frac{6}{5}$, 2 и 3.

6. **(5 баллов)**Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении n^3 при $n=1,2,3,\dots$ ($a_1=1,\ a_2=8,\ a_3=2,\ a_4=6,\ a_5=1,\dots$). Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству

$$10^k\sqrt[3]{b}\le n<10^k\sqrt[3]{b+1}.$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b, поскольку

$$10^{3k}b=\overline{b\underbrace{0\dots0}_{3k}}\le n^3\le\overline{b\underbrace{9\dots9}_{3k}}=10^{3k}(b+1)-1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[10^k\sqrt[3]{b};10^k\sqrt[3]{b+1}\right)$ неограниченно возрастает (т.к. $\sqrt[3]{b+1}-\sqrt[3]{b}>0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, …, девяток. Поэтому она не может быть периодической.

Вариант 4

1. **(2 балла)**В луже живут амебы трех видов: красные, синие и желтые. Время от времени любые две амебы разных видов могут слиться в одну амебу третьего вида. Известно, что утром в луже было 45 красных, 73 синих и 66 желтых амеб, а вечером осталась одна амеба. Какого она цвета?

Ответ: желтая.

2. **(3 балла)** Решите уравнение:

$$\left[\frac{7x-3}{5}\right]=\frac{17x-9}{6}.$$

Ответ: $x=\frac{3}{17}$, $x=\frac{9}{17}$

3. **(3 балла)**Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, если известно, что $f\left(x\right)=x^2-5x+3$.

Ответ: $3\pm\sqrt{6}$, $2\pm\sqrt{5}$.

4. **(4 балла)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\log_2\left(y-x\right)=\log_8\left(18y-26x\right)\\ x^2+y^2=26\end{cases}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\sqrt{26};0\right);(1;5);\left(2\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)\right\}$.

5. **(5 баллов)** Стороны параллелограмма равны 2 и 3, а угол между ними – $\arccos\frac{6}{13}$. Две взаимно перпендикулярные прямые делят этот

параллелограмм на четыре равновеликих четырехугольника. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят стороны параллелограмма.

Ответ: $\frac{13}{9}$ и $\frac{5}{9}$, $\frac{13}{6}$ и $\frac{5}{6}$.

6. **(5 баллов)** Пусть a_n – первая (старшая) цифра в десятичном разложении $\left[\sqrt{4n}\right]$ при $n=1,2,3,\ldots$ $(a_1=2,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=4,\ldots)$. Докажите, что данная последовательность не является периодической.

Решение:

Пусть b – произвольная цифра от 1 до 9 и k – любое натуральное число. Тогда для всех номеров n, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{10^{2k}\cdot b^2}{4}\le n<\frac{10^{2k}\left(b+1\right)^2}{4},$$

последовательность a_n постоянна и совпадает с b, поскольку

$$10^k b=\overline{b\underbrace{0\ldots0}_{k}}\le\sqrt{4n}\le\overline{b\underbrace{9\ldots9}_{k}}=10^k(b+1)-1.$$

Осталось заметить, что при росте k длина отрезка $\left[\frac{10^{2k}b^2}{4};\ \frac{10^{2k}\left(b+1\right)^2}{4}\right)$ неограниченно возрастает (т.к. $\left(b+1\right)^2-b^2>0$).

Следовательно, в нашей последовательности найдутся сколь угодно много подряд идущих единиц, двоек, …, девяток. Поэтому она не может быть периодической.